Абстрактные свойства класса интервалов решеток замкнутых классов

Булатов А.А.

Данная работа посвящена изучению свойств класса подрешеток и класса решеток, изоморфных интервалам решеток замкнутых классов функций на конечном множестве. Как известно, структура решетки замкнутых классов — за исключением решетки замкнутых классов булевых функций — весьма сложна и не оставляет надежд на получение сколь-нибудь приемлемого описания. Мы надеемся, что, как и при изучении других решеток, исследование класса подрешеток и класса интервалов прояснит и строение решетки замкнутых классов в целом.

К настоящему времени эти два класса практически не исследованы. Исключением является решетка замкнутых классов булевых функций, для которой имеется исчерпывающее описание ([1]). Кроме того, известен обширный класс решеток, содержащий в частности все конечные решетки, вложимых в решетку замкнутых классов функций, на множестве с более чем 3 элементами ([2]). Данная работа продолжает изучение класса решеток, вложимых в решетки замкнутых классов, начатое в [2, 3, 4], а также в работах автора, находящихся в печати.

§1. Предварительные замечания и формулировка результатов

Вработе используются известные понятия, их можно найти в [6], [7]. Напомним лишь некоторые обозначения. Для конечного множества A, $|A| = k$, через O_A обозначается множество всех функций на A. Число переменных функции f обозначается через $\operatorname{ar} f$. Решетка всех клонов обозначается через $\mathcal{L}_A$. Она является подрешеткой, а точнее главным фильтром решетки замкнутых классов, порожденным классом всех проекций. Это обстоятельство позволяет распространить все результаты,

упомянутые в работе на решетки замкнутых классов. Поскольку решетки клонов на равномощных множествах изоморфны, мы будем использовать обозначение $\mathcal{L}_k$ вместо $\mathcal{L}_A$. Более подробные сведения о решетках клонов можно почерпнуть в [6], [7], а здесь мы изложим имеющиеся сведения лишь о классе подрешеток решетки клонов. Теоретико-решеточные понятия и факты читатель может найти в книге [5].

Решетки клонов $\mathcal{L}_k$ при $k \geq 3$ континуальны ([8]) и имеется целый ряд результатов — некоторые из них будут упомянуты ниже,— свидетельствующих о том, что структура решеток клонов в этом случае весьма сложна. Изучение класса подрешеток (интервалов) решетки клонов представляется поэтому весьма интересной и привлекательной задачей. Существует две задачи, на решение которых направлена данная работа. Эти задачи соответствуют двум направлениям, разрабатываемым в исследовании указанных классов.

Во-первых, вопросы, связанные с вложением решеток $\mathcal{L}_k$ друг в друга. В настоящее время известно лишь два несложно проверяемых, но красивых факта, относящихся к этой проблеме (см. [7], п.3.3, с.86). А именно, для любого натурального k решетка $\mathcal{L}_k$ изоморфна интервалу в $\mathcal{L}_{k+1}$, причем верхняя граница интервала является коатомом в $\mathcal{L}_{k+1}$. Далее, прямое произведение решеток $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_l$ изоморфно интервалу в $\mathcal{L}_{k \cdot l}$, причем нижняя граница интервала есть атом в $\mathcal{L}_{k \cdot l}$, а верхняя — пересечение двух коатомов. Отсюда следует, что класс подрешеток (как и класс интервалов) решеток клонов замкнут относительно конечных прямых произведений. Отметим также, что не имеется никакой информации относительно вложения $\mathcal{L}_k$ в $\mathcal{L}_m$ при $m < k$. Неизвестно, в частности, решение следующей проблемы.

Проблема 1 *Существует ли число k такое, что для любого m решетка $\mathcal{L}_m$ изоморфно вложима в $\mathcal{L}_k$?*

Во-вторых, расширение запаса решеток и классов решеток, вложимых или представимых интервалами решеток клонов. Бóльшая часть результатов в этом направлении, кроме изолированных примеров конкретных подрешеток, связана с декартовым произведением решеток. Хронологически первым результатом такого рода следует, по-видимому, считать работу [9]. В ней показано, что решетка подмножеств счетного множества (т.е. счетная декартова степень двухэлементной решетки)

изоморфна некоторому интервалу в $\mathcal{L}_k$, $k \geq 3$. Усилением этого факта является утверждение из [10], гласящее, что счетная декартова степень цепи типа $\omega + 1$ изоморфна некоторому интервалу в $\mathcal{L}_k$, $k \geq 3$. Далее, в [4] для произвольной последовательности конечных полурешеток указан интервал в $\mathcal{L}_3$ изоморфный декартову произведению их решеток подполурешеток. Отсюда следует, что такой интервал существует и в любой $\mathcal{L}_k$ при $k \geq 3$. Наконец, как показано в [2], декартово произведение последовательности произвольных конечных решеток изоморфно вложимо в $\mathcal{L}_k$ для $k \geq 4$.

Таким образом, во всех случаях возникают классы решеток, замкнутые относительно счетных декартовых произведений. Как показывает следующая теорема, являющаяся основным результатом работы, это обстоятельство не случайно. Кроме того, теорема дает новую информацию о вложении решеток $\mathcal{L}_k$ друг в друга, усиливая утверждение о вложимости прямых произведений.

Теорема 1 *Для любого $k \geq 2$ счетная степень решетки $\mathcal{L}_k$ изоморфна некоторому интервалу в решетке $\mathcal{L}_{k+3}$.*

Применительно к классу подрешеток решеток клонов теорема влечет следующее свойство.

Следствие 1 *Класс подрешеток (интервалов) решеток клонов замкнут относительно счетных прямых степеней.*

К сожалению, из теоремы не следует замкнутость класса подрешеток (интервалов) решеток клонов относительно счетных прямых произведений. Таким образом, остается открытой. следующая проблема

Проблема 2 *Замкнут ли класс подрешеток (интервалов) решеток клонов относительно счетных прямых произведений?*

Отметим еще, что, как нетрудно видеть, проблемы 1 и 2 эквивалентны.

§2. Метод доказательства

Для доказательства теоремы мы используем соответствие Галуа между клонами функций и отношений (см. [7], п.1.2, с.53). Множество

всех n-местных отношений на множестве A обозначим через $R_A^{(n)}$ (для отношения $\varrho \in R_A^{(n)}$ мы будем также писать $\operatorname{ar}\varrho = n$). Пусть, кроме того, $R_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_A^{(n)}$. Элемент отношения будем называть кортежем и использовать для его обозначения полужирный шрифт, например, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) = (a_i)_{i\in\underline{n}}$, где $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$. Нам придется рассматривать отношения, чьи координаты индексированы элементами некоторого множества $I \subseteq \mathbb{N}$. Кортежи такого отношения будем обозначать $(a_i)_{i\in I}$. При этом множество I (состоящее из натуральных чисел) предполагается естественным образом упорядоченным.

Как обычно, для $C \subseteq O_A$, $T \subseteq R_A$ через $\operatorname{Inv} C$ обозначается множество всех отношений, сохраняемых функциями из C, а через $\operatorname{Pol} T$ — множество всех функций, сохраняющих все отношения из T. Множествами вида $\operatorname{Pol} T$ являются в точности клоны (см. [7], п.1.2, с.53). Множества отношений вида $\operatorname{Inv} C$ также можно охарактеризовать на языке замкнутости относительно некоторых операций. Мы приведем небольшой список таких операций. Часть этих операций используется в [11]. Нам будут удобны несколько отличные от использованных в [11] обозначения. понадобятся нам ниже. Пусть $\operatorname{ar}\varrho = n$, $\operatorname{ar}\sigma = l$.

1. *Проекция.* Пусть $I \subseteq \underline{n}$ — множество координат. Для кортежа $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ через $\mathbf{a}|_I$ обозначим кортеж $(a_i)_{i\in I}$. Проекцией ϱ на I называется отношение

$$\varrho|_I = \{\mathbf{a}|_I \mid \mathbf{a} \in \varrho\}.$$

2. *Прямое произведение.* Прямым произведением отношений ϱ и σ называется отношение

$$\varrho \times \sigma = \{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_l) \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \varrho, (b_1, \ldots, b_l) \in \sigma\}.$$

3. *Перестановка координат.* Для перестановки π множества $\underline{n}$ отношение

$$\pi(\varrho) = \{(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \varrho\}$$

называется отношением, полученным из ϱ в результате перестановки координат π.

4. *Отождествление координат.* Отождествлением координат i и j, $i < j$, отношения ϱ называется операция, определенная следующим образом

$$\nabla_{i,j}(\varrho) = \{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \mid (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_j, \ldots, a_{n-1}) \in \varrho\}.$$

5. *Удвоение координаты.* Удвоением i-ой координаты отношения ϱ называется операция, определенная следующим образом

$$D_i(\varrho) = \{(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \mid (a_1, \ldots, a_n \in \varrho\}.$$

Далее, тривиальным называется отношение вида υ_n^σ, где σ — отношение эквивалентности на множестве $\underline{n}$, причем кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ содержится в υ_n^σ тогда и только тогда, когда $a_i = a_j$ для всех пар $(i, j) \in \sigma$. Частными случаями тривиальных отношений служат универсальное отношение υ_n (σ — отношение равенства) и обобщенное отношение равенства ω_n (σ — универсальное отношение).

Известно, что каждое множество вида $\mathrm{Inv}\, C$ замкнуто относительно всех из перечисленных операций и содержит все тривиальные отношения. В [11] было доказано и обратное, а именно, каждое множество отношений, содержащее отношение равенства и замкнутое относительно отождествления координат, проекций, прямых произведений и перестановок координат имеет вид $\mathrm{Inv}\ C$. Такие замкнутые множества отношений называются также *клонами отношений*.

Все клоны отношений на k-элементном множестве A образуют полную решетку $\mathcal{L}_k^\partial$, которая дуально изоморфна решетке клонов $\mathcal{L}_k$. Этим обстоятельством мы и воспользуемся для доказательства нашей теоремы.

Замкнутость множества отношений можно выразить также на языке математической логики ([7], п.2.1, с.64). Каждому n-местному отношению ϱ естественным образом сопоставим n-местный предикат P_ϱ. Каждой из перечисленных выше операций соответствует $\exists\wedge$-формула исчисления предикатов. Например, справедливо

$$P_{\varrho'}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \exists x_n P_\varrho(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\varrho' = \varrho\big|_{\{1, \ldots, n-1\}}$. Более того, для любых отношений ϱ_α, $\alpha \in \in \Lambda$, где Λ — конечное множество, $\mathrm{ar}\,\varrho_\alpha = n_\alpha$, произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ и произвольных отображений $\pi\colon \underline{n} \to \underline{m}$ и $\pi_\alpha\colon \underline{n_\alpha} \to \underline{m}$, $\alpha \in \Lambda$, отношение ϱ, определяемое формулой

$$P_\varrho(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = \exists (x_i)_{i \in \underline{m} \setminus \pi(\underline{n})} \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} P_{\varrho_\alpha}(x_{\pi_\alpha(1)}, \ldots, x_{\pi_\alpha(n_\alpha)}), \qquad (1)$$

содержится в клоне отношений $\langle\{\varrho_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}\rangle$. Можно проверить и обратное.

Предложение 1 *Если $\varrho \in \langle S\rangle$, $S \subseteq R_A$, то для некоторого конечного Λ и отношений $\varrho_\alpha \in S$, $\alpha \in \Lambda$, найдется формула вида (1), представляющая отношение ϱ.*

Кортеж $(a_1, \ldots, a_m)$, для которого истинна бескванторная часть формулы (1), т.е.

$$\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} P_{\varrho_\alpha}(x_{\pi_\alpha(1)}, \ldots, x_{\pi_\alpha(n_\alpha)})$$

будем называть *допустимым* для (1).

На самом деле, при изучении клона отношений, порожденного множеством отношений, можно несколько сузить класс рассматриваемых $\exists\wedge$-формул. Для этого заметим сначала, что если отображение π не инъективно, например, $\pi(i) = \pi(j)$, то для каждого кортежа $\mathbf{a} \in \varrho$ выполнено равенство $a_i = a_j$. Однако, в этом случае ϱ можно получить из отношения $\varrho\big|_{I\setminus\{j\}}$ при помощи удвоения координат. Поэтому нам достаточно рассматривать лишь отношения, у которых никакая пара координат не обладает указанным свойством, а значит, можно полагать отображение π инъективным. При этом предположении мы можем переопределить подходящим образом отображения π, π_α, $\alpha \in \Lambda$, так, чтобы выполнялось условие $\pi(i) = i$ для всех $i \in \underline{n}$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что π имеет такой вид.

§3. Индексации и кодирующие отношения

Некоторые соглашения. В доказательстве нам понадобятся многие объекты различной природы. Примем некоторые соглашения относительно обозначений. Мы рассматриваем отношения и функции на множествах $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и E_{k+3}. Отношения на множестве E_k мы будем обозначать буквой ϱ, возможно с индексами, а отношения на E_{k+3} — буквой τ. Множества натуральных чисел (обычно это будут множества координат отношений) обозначаются прописными латинскими буквами, предпочтительно из середины алфавита. Наконец, нам часто будут нужны отображения множеств натуральных чисел друг в друга, такие отображения будут обозначаться буквами γ, μ.

Несколько специальных кортежей.

Пусть p — простое число большее 5 и $r \in \mathbb{N}$. Рассмотрим кортежи $\mathbf{v}^r_j = (k+1, \ldots, k+1, \underset{j}{k}, k+1, \ldots, k+1)$, $\mathbf{s}^r_j = (k+1, \ldots, k+1, \underset{j}{k}, \underset{j+1}{k}, k+1, \ldots, k+1)$, $\mathbf{t}^r = (k, k, k, k+1, \ldots, k+1)$ с p^r компонентами, где $1 \le j \le p^r$ для $\mathbf{v}^r_j$ и $1 \le j \le p^r - 1$ для $\mathbf{s}^r_j$. Кортеж $\mathbf{v}^r_j$ назовем *r-выделяющим* с номером j или j-м r-выделяющим кортежем. Аналогично, кортеж $\mathbf{s}^r_j$ назовем *r-связывающим* кортежем с номером j или, короче, j-м r-связывающим кортежем, а $\mathbf{t}^r$ — r-титульным кортежем. Число j мы будем называть *номером*, а r — *рангом* указанных кортежей.

Индексации. Пусть I, J — множества натуральных чисел и γ — отображение множества I в множество J. Скажем, что кортеж $\mathbf{b} = (b_j)_{j \in J}$ является *образом* кортежа $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$, а кортеж $\mathbf{a}$ *прообразом* кортежа $\mathbf{b}$ (в обозначениях $\mathbf{b} = \gamma(\mathbf{a})$ или $\mathbf{a} = \gamma^{-1}(\mathbf{b})$), если $a_i = b_{\gamma(i)}$ для всех $i \in I$. Кортеж может иметь более одного образа, если отображение γ не является отображением "на" или не иметь его вовсе, если γ не инъективно. В то же время прообраз всегда единствен.

Пусть теперь ϱ — n-местное отношение и $I \subseteq \underline{n}$. Отображение $\gamma\colon I \to \underline{p^r}$ называется *индексацией* (*r-индексацией или индексацией ранга r*) множества I координат отношения ϱ, если для любого j, $1 \le j \le p^r$, отношение $\varrho\big|_I$ содержит прообразы кортежей $\mathbf{v}^r_j$, $\mathbf{s}^r_j$, $\mathbf{t}^r$. Само множество I мы назовем *индексируемым* (*r-индексируемым*), если существует хотя бы одна его индексация (r-индексация). Мы также будем называть отношение индексируемым (r-индексируемым), если индексируемо множество всех его координат.

Простейшим примером r-индексируемого отношения может служить p^r-местное отношение, состоящее в точности из r-выделяющих, r-связывающих и r-титульного кортежей.

В завершение этого пункта приведем два легко проверяемых утверждения.

Лемма 1 *Если отображение $\gamma\colon I \to p^r$, $I \subseteq \underline{n}$, является индексацией n-местного отношения ϱ и не является отображением "на", то $\varrho\big|_I$ содержит кортеж $(k+1, \ldots, k+1)$.*

Доказательство. Пусть $j \notin \gamma(I)$ и пусть $\mathbf{a} \in \varrho$ таков, что $\mathbf{a}\big|_I$ —

прообраз кортежа $\mathbf{v}^r_j$. Для каждого $i \in I$ справедливо $a_i = v_{\gamma(i)} = k+1$ поскольку $\gamma(i) \neq j$. Таким образом, $\mathbf{a}\big|_I = (k+1, \ldots, k+1)$. $\square$

Лемма 2 *Пусть $I \subseteq \underline{n}$ — индексируемое множество координат n-местного отношения ϱ с индексацией γ. Тогда любое $J \subseteq I$ индексируемо отображением $\gamma' = \gamma\big|_J$.*

Кодирующие отношения. Пусть ϱ — отношение на множестве E_k, r — натуральное число и $s = \operatorname{ar}\varrho$. Для $\mathbf{a} \in \varrho$ через $\mathbf{w}^r_{\mathbf{a}}$ обозначим кортеж $(w_1, \ldots, w_{sp^r})$, где $w_{ip^r+1} = \ldots = w_{(i+1)p^r} = a_i$. Обозначим через $\mathbf{v}'^r_j$ ($\mathbf{s}'^r_j$, $\mathbf{t}'^r$) кортеж такой, что для всякого $i \in \underline{s}$ выполнено $\mathbf{v}'^r_j\big|\{ip^r+1, \ldots, (i+1)p^r\} = \mathbf{v}^r_j$ (аналогично определяются $\mathbf{s}'^r_j$, $\mathbf{t}'^r$). Отношение κ^r_ϱ такое, что $\mathbf{b} \in \kappa^r_\varrho$ тогда и только тогда, когда либо множество $\{j \in \{0, \ldots, p^r-1\} \mid$ найдется i такое, что $b_{ip^r+j} \neq k+2\}$ есть собственное подмножество в $\{0, \ldots, p^r-1\}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{t}'^r$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{v}'^r_l, \mathbf{s}'^r_l$ для некоторого l, либо $\mathbf{b} = \mathbf{w}^r_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a} \in \varrho$.

Лемма 3 *Для любых $\varrho_1, \varrho_2 \in R_k$, где $ar\,\varrho_1 = m$, $ar\,\varrho_2 = n$, справедливо*

1. $\nabla_{p^r-1,p^r}(\ldots \nabla_{2,p^r}(\nabla_{1,p^r}\kappa^r_{\varrho 1})\ldots) = \kappa^r_{\nabla_{1,2}\varrho 1}$,
2. $(\kappa^r_{\varrho 1} \times \kappa^r_{\varrho 2}) \cap \kappa^r_{v_{m+n}} = \kappa^r_{\varrho 1 \times \varrho 2}$,
3. $\kappa^r_{\varrho 1}\big|\{1, \ldots, (m-1)p^r\} = \kappa^r_{\varrho'}$, *где* $\varrho' = \varrho_1\big|\{1, \ldots, m-1\}$,
4. $\pi'\kappa^r_{\varrho 1} = \kappa^r_{\pi\varrho 1}$, *где π — перестановка множества $\underline{m}$, π' — перестановка $\underline{p^r m}$, причем $\pi'(ip^r + j) = \pi(i)p^r + j$ для всех $i \in \underline{m}$ и $j \in \{0, \ldots, p^r-1\}$.*

Непосредственно из определения вытекает следующее утверждение.

Лемма 4 *Для любого $\varrho \in R^{(n)}_{E_k}$, любого $r \in \mathbb{N}$ и $I \subseteq \underline{np^r}$, если $\{j \in \{0, \ldots, p^r-1\} \mid j \equiv i \pmod{p^r}$ для некоторого $i \in I\} \neq \{0, \ldots, p^r-1\}$, то $\kappa^r_\varrho\big|_I$ является универсальным отношением.*

Описание индексаций кодирующих отношений. В этом пункте мы полностью опишем индексации каждого подмножества множества координат кодирующего отношения. Это описание полезно по двум причинам. Во-первых, мы будем использовать его в дальнейших рассуждениях, а во-вторых, оно покажет, что кодирующие отношения имеют

очень мало индексаций, а индексация множества всех координат единственна, и поэтому мы можем с ее помощью отделять координаты одну от другой.

Отношение ϱ, $\operatorname{ar}\varrho = n$, назовем *однозначно индексируемым*, если оно имеет единственную индексацию.

Предложение 2 *Для всякого $\varrho \in R_k$ и всякого r отношение κ^r_ϱ однозначно индексируемо и его индексация γ определяется сравнением* $\gamma(i) \equiv i \pmod{p^r}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{ar}\varrho = s$. Рассмотрим ограничение γ индексации множества $\underline{s \cdot p^r}$ на множество $\underline{p^r}$. Это отображение, очевидно, является индексацией. Пусть она имеет ранг l, т.е. $\gamma\colon \underline{p^r} \to \underline{p^l}$. Отображение γ сюръективно, поскольку в противном случае по лемме 1 отношение $\kappa^r_\varrho|_{\underline{p^r}}$ содержало бы кортеж $(k+1, \ldots, k+1)$. Отсюда $l \le r$.

Кортеж, образ которого при отображении γ является j-м выделяющим (j-м связывающим, титульным, кодирующим) будем называть j-м γ-выделяющим (j-м γ-связывающим, γ-титульным, γ-кодирующим). Таким образом, один и тот же кортеж может быть одновременно, например, γ-выделяющим и γ-связывающим. Заметим еще, что проекциями кортежей $\mathbf{v}'^r_j$, $\mathbf{s}'^r_j$, $\mathbf{t}'^r$ на $\underline{p^r}$ служат кортежи $\mathbf{v}^r_j$, $\mathbf{s}^r_j$, $\mathbf{t}^r$ соответственно.

Шаг 1. Титульным кортежем для индексации γ является кортеж $\mathbf{t}^r$.

В самом деле, γ-титульный кортеж $\mathbf{a}$ содержит среди своих компонент лишь k и $k+1$, поэтому он совпадает с одним из кортежей $\mathbf{v}^r_j$, $\mathbf{s}^r_j$, $\mathbf{t}^r$. Однако, $|\gamma^{-1}(\{1,2,3\})| \ge 3$ и $a_i = k$ для всех $i \in \gamma^{-1}(\{1,2,3\})$, поэтому $\mathbf{a}$ не может быть выделяющим или связывающим.

Шаг 2. Выделяющими и связывающими кортежами для индексации γ служат кортежи $\mathbf{v}^r_j$ и $\mathbf{s}^r_j$.

Действительно, γ-выделяющими и γ-связывающими могут быть лишь кортежи вида $\mathbf{v}^r_j$, $\mathbf{s}^r_j$, $\mathbf{t}^r$, поскольку все прочие кортежи содержат компоненты не равные $k, k+1$. Далее, поскольку γ сюръективно, прообразы различных кортежей различны. Так как $\mathbf{t}^r$ γ-титульный, он не может быть равен никакому γ-выделяющему или γ-связывающему кортежу.

Шаг 3. γ биективно.

Предположим, что $\gamma(i_1) = \gamma(i_2) = j$ для некоторых $i_1, i_2 \in \underline{p^r}$. Рассмотрим j-й γ-связывающий кортеж $\mathbf{a}$ (если $j = p^r$, то нужно рассмотреть γ-связывающий кортеж с номером $p^r - 1$). Этот кортеж имеет по крайней

мере три равные k компоненты: $a_{i_1} = a_{i_2} = a_i = k$, где i какой-нибудь элемент из прообраза $j+1$. Но в силу шага 2 кортеж $\mathbf{a}$ не содержится в $\kappa^r_{\varrho}|_{\underline{p^r}}$.

Таким образом, γ-выделяющими кортежами являются кортежи вида $\mathbf{v}^r_j$, а γ-связывающими — $\mathbf{s}^r_j$.

Шаг 4. Для всякого $i \in \underline{p^r - 1}$ выполняется $\gamma(i+1) \in \{\gamma(i) - 1, \gamma(i) + 1\}$.

Пусть $\gamma(i) = j$. Рассмотрим $j-1$-й и j-й γ-связывающие кортежи $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Имеем $a_i = b_i = k$, а также $a_{\gamma^{-1}(j-1)} = b_{\gamma^{-1}(j+1)} = k$. Отсюда $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \in \{\mathbf{s}^r_i, \mathbf{s}^r_{i-1}\}$, а так как γ биективно, то $\{j-1, j+1\} = \{\gamma(i-1), \gamma(i+1)\}$, что и требовалось. В случае, когда $j = 1$ или $j = p^r$ достаточно рассматривать лишь один связывающий кортеж.

Шаг 5. $\gamma(1) = 1$.

Пусть $\mathbf{b}$ — образ $\mathbf{t}^r$, тогда $b_{\gamma(1)} = k$. Заметим, что поскольку образ $\mathbf{t}^r$ есть связывающий кортеж, то $\gamma(1) \in \{1, 2, 3\}$. Пусть $\gamma(1) = j$, $j \neq 1$ и $\gamma(2) = j+1$. Рассмотрим $j-1$-й γ-связывающий кортеж $\mathbf{a}$. Имеем $a_1 = a_{\gamma^{-1}(j)} = k$. В $\kappa^r_{\varrho}|_{\underline{p^r}}$ есть лишь один связывающий кортеж с таким свойством — это $\mathbf{s}^r_1$. Но тогда $a_2 = k$, и потому $\gamma^{-1}(j-1) = 2 = \gamma^{-1}(j+1)$, что противоречит биективности γ. Случай $\gamma(2) = j-1$ рассматривается аналогично.

Шаг 6. γ тождественно.

Согласно шагу 5 $\gamma(1) = 1$. Далее, $\gamma(2) \in \{\gamma(1)+1, \gamma(1)-1\}$, но случай $\gamma(1+1) = \gamma(1) - 1$ невозможен, а значит, $\gamma(2) = 2$. Предположим, что мы доказали равенство $\gamma(i) = i$ для всех $i \leq j$. Рассмотрим $\gamma(j+1)$. Согласно шагу 4 $\gamma(j+1) = \gamma(j)+1 = j+1$, либо $\gamma(j+1) = \gamma(j)-1 = j-1$. Но в последнем случае имеем $\gamma(j-1) = j-1 = \gamma(j+1)$, что противоречит биективности γ. Таким образом, мы получаем, что γ — тождественное отображение.

Аналогично проверяется, что для любого $i \in \underline{s}$ ограничение индексации на множество $\{i \cdot p^r + 1, \ldots, (i+1) \cdot p^r\}$ есть отображение, переводящее $i \cdot p^r + j$ в j. Таким образом, каждая индексация отношения κ^r_{ϱ} имеет вид, указанный в формулировке. Предложение 2 доказано. □

Если же множество $J \subseteq \underline{p^r}$ не равно $\underline{p^r}$, то любое отображение множества I в $\underline{p^m}$ для любого m является m-индексацией, поскольку $\kappa^r_{\varrho}|_I$ —

универсальное отношение в силу леммы 4.

Пусть $J = \{i_1 p^r + 1, \ldots, i_{p^r} p^r + p^r\}$, где $i_1, \ldots, i_{p^r} \in \underline{\operatorname{ar} \varrho}$. Тогда, очевидно, отношения $\kappa^r_\varrho|_J$ и $\kappa^r_\varrho|_{\{1, \ldots, p^r\}}$ отличаются лишь кортежами, чьи компоненты содержатся в множестве E_k.

Следствие 2 *Если множество J координат отношения κ^r_ϱ таково, что $\{i \in \underline{p^r} \mid j \equiv i \pmod{p^r}, j \in J\} = \underline{p^r}$, то J имеет единственную индексацию, которая определена в предложении 2. В противном случае, любое отображение $\gamma\colon J \to \underline{p^m}$ является индексацией J.*

§4. Построение вложения

Множество отношений SN**.** Пусть ϱ — n-местное отношение. Положим $M_\varrho\colon \mathcal{P}(\underline{n}) \to \mathcal{P}(\underline{n})$ — отображение множества подмножеств из $\underline{n}$ в себя такое, что

$$\begin{aligned} M_\tau(I) \;=\; & \{j \in \underline{n} \mid \text{найдется } j \in I \text{ такое, что для всех } \mathbf{a} \in \tau \\ & \text{из } \{a_i \mid i \in I\} \subseteq E_{k+2} \text{ следует } a_j \in E_{k+2}\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что отображение M_τ является оператором замыкания. Замкнутые для этого оператора множества мы будем называть замкнутыми множествами координат. Таким образом, множество I замкнуто тогда и только тогда, когда для всякого $j \notin I$ найдется кортеж $\mathbf{a} \in \tau$ такой, что $a_i \in E_{k+2}$ для всех $i \in I$ и $a_j = k+2$. Пусть также $\sigma(\tau)$ — отношение эквивалентности на множестве $\underline{n}$, определенное следующим образом: $(i, j) \in \sigma(\tau)$ тогда и только тогда, когда $a_i = a_j$ для всех $\mathbf{a} \in \tau$. Как обычно, через $i^{\sigma(\tau)}$ ($I^{\sigma(\tau)}$) обозначается класс эквивалентности, содержащий $i \in \underline{n}$ (объединение классов, содержащих элементы из $I \subseteq \underline{n}$). Для каждого отношения ϱ найдется отношение ϱ' такое, что $\sigma(\varrho')$ есть отношение равенства и ϱ может быть получено из ϱ' удвоениями координат, а ϱ' из ϱ отождествлениями. Поэтому всюду, кроме основных определений, мы предполагаем, что $\sigma(\varrho)$ — отношение равенства.

Для произвольного $I \subseteq \underline{n}$ через $\xi(\tau, I)$ обозначим отношение эквивалентности на I, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi(\tau, I) \;=\; & \{(i, j) \in I^2 \mid a_i = a_j \text{для всех } \mathbf{a} \in \tau \\ & \text{таких, что } \mathbf{a}|_I \in E_k^{|I|}\}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что I — индексируемое множество и $\{i_1, \ldots, i_s\}$ — некоторый набор представителей классов эквивалентности $\xi(\tau, I)$. Положим

$$\mathrm{K}(\tau, I) = (\tau\big|_I \cap E_k^{|I|})\big|_{\{i_1, \ldots, i_s\}}.$$

Аналогично, для кортежа $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ такого, что $\mathbf{a} \in E_k^{|I|}$ и $a_i = a_j$ для всех $(i, j) \in \xi(\varrho, I)$, обозначим $\mathrm{K}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\big|_{\{i_1, \ldots, i_s\}}$. Таким образом, $\mathrm{K}(\kappa^r_\varrho, \underline{\mathrm{ar}\, p^r}) = \varrho$ и $\mathrm{K}(\mathbf{w}^r_{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}$.

Для n-местного кортежа $\mathbf{a}$ через $2_I(\mathbf{a})$, где $I \subseteq \underline{n}$, обозначается кортеж $(b_1, \ldots, b_n)$, для которого $b_i = a_i$ при $i \in I$ и $b_i = k + 2$ в противном случае. Кортеж вида $(k+1, \ldots, k+1)$ будем называть единичным. Через SN обозначим множество отношений τ, удовлетворяющих следующим условиям.

SN1. Для всякого $I \subseteq \underline{n}$ и $\mathbf{a} \in \tau$ кортеж $2_{M_\tau(I)}(\mathbf{a})$ содержится в τ.

SN2. Если $\tau\big|_I$ содержит единичный кортеж, то $\tau\big|_I$ тривиальное отношение и $M(I) = I^{\sigma(\tau)}$.

SN3. Если для I найдутся индексации γ, γ' различного ранга, то $\tau\big|_I$ — тривиальное отношение.

SN4. Если для I найдутся две индексации γ, γ' одинакового ранга и для некоторого $i \in I$ справедливо $\gamma(i) \neq \gamma'(i)$, то $\tau\big|_{I^{\sigma(\varrho)}} = \tau\big|_{I^{\sigma(\tau)} \setminus \{i^{\sigma(\tau)}\}} \times \tau\big|_{\{i^{\sigma(\tau)}\}}$.

SN5. Для каждой индексации множества I найдется индексация множества $M_\tau(I)$, причем для всякого $\mathbf{a} \in \tau$ из того, что $\mathbf{a}\big|_I$ — кодирующий, следует, что и $\mathbf{a}\big|_{M_\tau(I)}$ — кодирующий, если $\mathbf{a}\big|_I$ — выделяющий (связывающий, титульный) с номером j, то $\mathbf{a}\big|_{M_\tau(I)}$ — выделяющий (связывающий, титульный) с тем же номером.

SN6. Если I — индексируемое множество, то $K(\tau, I)$ является тривиальным отношением.

Как показывает следующая лемма, множество SN непусто.

Лемма 5 *Для любого r и любого $\varrho \in R_k$ отношение κ^r_ϱ удовлетворяет условиям SN1–SN5.*

Доказательство. Обозначим $\tau = \kappa^r_\varrho$, $\operatorname{ar}\varrho = s$, $n = s \cdot p^r$ и пусть γ_0 — (единственная) индексация отношения τ. Для $I \subseteq \underline{n}$ положим $S_I = \gamma_0(I)$. Заметим сначала, что

$$M_\tau(I) = \begin{cases} I, & \text{если } S_I \neq \underline{p^r}, \\ \underline{n} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, SN1 непосредственно вытекает из определения кодирующего отношения.

Если $\tau\big|_I$ содержит единичный кортеж, то $S_I \neq \underline{p^r}$, а потому $\tau\big|_I$ универсально, т.е. SN2 также выполнено.

Далее, для любого I либо $\tau\big|_I$ универсально, либо имеет единственную индексацию согласно предложению 2. Следовательно, SN3, SN4 верны.

Проверим SN5. Если $S_I \neq \underline{p^r}$, то $M_\tau(I) = I$ и доказывать нечего. В противном случае, если $\mathbf{a} \in \tau$ и $\mathbf{a}\big|_I$ — выделяющий (связывающий, титульный или кодирующий), то и весь $\mathbf{a}$ таков. □

Для любого $I \subseteq \underline{sp^r}$ проекция $\kappa^r_\varrho\big|_I$, где $s = \operatorname{ar}\varrho$, либо является универсальным отношением, либо $\mathrm{K}(\tau\big|_I)$ является проекцией ϱ на множество $J = \{j \in \underline{s} \mid \text{найдется } i \in \underline{p^r} \text{ такой, что } (j-1)p^r + i \in I\}$. Лемма 5 влечет следующее утверждение.

Следствие 3 *Для любого $I \subseteq \underline{n}$, где $n = ar\,\kappa^r_\varrho$, отношение $\mathrm{K}(\kappa^r_\varrho, I)$ является проекцией отношения ϱ.*

Таким образом, если ϱ тривиально, то $\mathrm{K}(\tau\big|_I)$ также тривиально.

Следствие 4 *Для всякого тривиального отношения $\varrho \in R_k$ и всякого r отношение κ^r_ϱ содержится в SN.*

Пусть $r \in \mathbb{N}$ и C — клон отношений на E_k. Скажем, что τ удовлетворяет условию $\mathrm{SN}(r, C)$, если

> Для всякого $I \subseteq \operatorname{ar}\tau$, для которого найдется индексация ранга r, справедливо $\mathrm{K}(\tau, I) \in C$.

Лемма 6 *Операции клона отношений сохраняют свойства SN1–SN5 и SN(r, C) для любых $r \in \mathbb{N}$ и клона отношений C.*

Доказательство. Нужно проверить, что проекции, прямое произведение и отождествление координат сохраняют SN1–SN5 и SN(r, C).

1) Проекции. Пусть τ удовлетворяет SN1–SN5, SN(r, C) для некоторых $r \in \mathbb{N}$ и C, $J \subseteq \underline{n}$, где $n = \operatorname{ar}\tau$, и $\tau' = \tau\big|_J$. Возьмем $I \subseteq J$. Очевидно, $M_{\tau'}(I) = M_\tau(I) \cap J$ и $\tau'\big|_I = \tau\big|_I$. Отсюда по свойству SN1 отношения τ немедленно следует, что $2_{M_{\tau'}(I)}(\mathbf{a}) = 2_{M_\tau(I)}(\mathbf{a}')\big|_J \in \tau'$ для любого $\mathbf{a}' \in \tau$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}'\big|_I \in \tau'$. Таким образом, SN1 выполнено. Если $\tau'\big|_I$ содержит единичный кортеж, то $M_{\tau'}(I) = M_\tau(I) \cap J = I \cap J = I$ и $\tau'\big|_I = \tau\big|_I$ является универсальным отношением.

Если γ_1, γ_2 — индексации I различных рангов, то $\tau'\big|_I = \tau\big|_I$ есть тривиальное отношение, что доказывает SN3. Пусть γ_1, γ_2 — индексации множества I отношения τ' такие, что $\gamma_1(i) \neq \gamma_2(i)$ для некоторого $i \in I$. Тогда по SN4 для τ имеем $\tau'\big|_I = \tau\big|_I = \tau\big|_{I\setminus\{i\}} \times \tau\big|_{\{i\}} = \tau'\big|_{I\setminus\{i\}} \times \tau'\big|_{\{i\}}$. Свойство SN5 отношения τ' непосредственно вытекает из SN5 для τ, а сохранение SN(r, C) следует из равенства $\mathrm{K}(\tau', I) = \mathrm{K}(\tau, I)$, так как $\tau'\big|_I = \tau\big|_I$.

2) Прямое произведение. Пусть $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, τ_1, τ_2 удовлетворяют SN1–SN5, SN(r, C) для некоторых $r \in \mathbb{N}$ и C, J_1, J_2 — множества координат отношений τ_1, τ_2 (при этом мы полагаем $J_1 \cap J_2 = \varnothing$), $I \subseteq$ $\subseteq J_1 \cup J_2$ и $I^1 = I \cap J_1$, $I^2 = I \cap J_2$. Очевидно равенство $M_\tau(I) = M_{\tau_1}(I^1) \cup$ $\cup M_{\tau_2}(I^2)$. Свойство SN1 следует из равенства $2_{M_\tau(I)}(\mathbf{a}) = 2_{M_{\tau_1}(I^1)}(\mathbf{a}\big|_{J_1}) \times$ $\times 2_{M_{\tau_2}(I^2)}(\mathbf{a}\big|_{J_2})$.

Если $\tau\big|_I$ содержит единичный кортеж, то $\tau_1\big|_{I^1}$, $\tau_2\big|_{I^2}$ также содержит единичный кортеж. Отсюда $M_\tau(I) = M_{\tau_1}(I^1) \cup M_{\tau_2}(I^2) = I^1 \cup I^2 = I$, $\tau_1\big|_{I^1}$, $\tau_2\big|_{I^2}$ универсальны, а потому $\tau\big|_I = \tau_1\big|_{I^1} \times \tau_2\big|_{I^2}$ также универсально. Таким образом, SN2 выполнено.

Если γ_1, γ_2 — индексации множества I, имеющие различные ранги, то $\gamma_1\big|_{I^1}, \gamma_2\big|_{I^1}$ и $\gamma_1\big|_{I^2}, \gamma_2\big|_{I^2}$ также имеют различные ранги. Поэтому $\tau_1\big|_{I^1}$, $\tau_2\big|_{I^2}$ тривиальны, а значит $\varrho\big|_I = \tau_1\big|_{I^1} \times \tau_2\big|_{I^2}$ тривиально.

Допустим, что γ_1, γ_2 — индексации множества I, удовлетворяющие посылке условия SN4, т.е. $\gamma_1(i) \neq \gamma_2(i)$. Без ограничения общности мож-

но считать, что $i \in I_1$. Отсюда $\tau_1\big|_{I^1} = \tau_1\big|_{I^1\setminus\{i\}} \times \tau\big|_{\{i\}}$ по свойству SN4. Таким образом,

$$\tau\big|_I = \tau_1\big|_{I^1\setminus\{i\}} \times \tau\big|_{\{i\}} \times \tau\big|_{I^2} = \tau\big|_{I\setminus\{i\}} \times \tau\big|_{\{i\}},$$

что и требовалось.

Требуемым в условии SN5 продолжением индексации γ множества I на $M_\tau(I)$ служит отображение γ', которое на $M_{\tau_j}(I^j)$, $j = 1, 2$, совпадает с существующим по SN5 для τ_j продолжением индексации $\gamma\big|_{I^j}$. При этом, если $\mathbf{a} \in \tau\big|_{M(I)}$ таков, что $\mathbf{a}\big|_I$ выделяющий (связывающий или титульный), то $\mathbf{a}\big|_{M_{\tau_1}(I^1)}$, $\mathbf{a}\big|_{M_{\tau_2}(I^2)}$ — выделяющие (связывающие, титульные) с тем же номером. Следовательно, и $\mathbf{a}$ таков.

Наконец, если $\mathbf{a}_1 \in \tau_1$, $\mathbf{a}_2 \in \tau_2$ кодирующие кортежи, то $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ также кодирующий и обратно. Далее, $\xi(\tau, I) = \xi(\tau_1, I^1) \cup \xi(\tau_2, I^2)$ за исключением случая, когда найдутся $i_1 \in I^1$, $i_2 \in I^2$, входящие в соответствующие системы представителей и такие, что отношения $\mathrm{K}(\tau_1, I^1)\big|_{\{i_1\}}$ и $\mathrm{K}(\tau_2, I^2)\big|_{\{i_2\}}$ равны и одноэлементны. Таким образом, $\mathrm{K}(\tau, I) = \mathrm{K}(\tau_1, I^1) \times \mathrm{K}(\tau_2, I^2)$. В последнем же случае $\mathrm{K}(\tau, I) = \nabla_{i_1,i_2}(\mathrm{K}(\tau_1, I^1) \times \mathrm{K}(\tau_2, I^2))$, если пара i_1, i_2 единственная с таким свойством. Если таких пар более одной то $\mathrm{K}(\tau, I)$ получается в результате нескольких отождествлений координат. Итак, $\mathrm{K}(\tau, I) \in C$, если $\mathrm{K}(\tau_1, I^1), \mathrm{K}(\tau_2, I^2) \in C$.

3) Отождествление. Пусть $\tau' = \nabla_{n-1,n}\tau$ и τ удовлетворяет SN1–SN5, SN(r, C) для некоторых $r \in \mathbb{N}$ и C,. Так как τ удовлетворяет SN1

$$M_{\tau'} = \begin{cases} M_\tau(I), & \text{если } n-1 \notin M_\tau(I), \\ M_\tau(I \cup \{n-1, n\})\setminus\{n\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку каждое замкнутое для τ' множество координат является также замкнутым для τ (с точностью до наличия n-ой координаты), свойство SN1 отношения τ' следует из соответствующего свойства для τ.

Возьмем $I \subseteq \underline{n-1}$ и положим $I' = I$, если $n-1 \notin I$ и $I' = I \cup \{n\}$ при $n-1 \in I$. Если $\tau'\big|_I$ содержит единичный кортеж, то и $\tau\big|_{I'}$ его содержит. Отсюда $\tau\big|_{I'}$ — универсальное отношение и $M_\tau(I') = I'$. Таким образом, $M_{\tau'}(I) = I$ и в силу SN1 отношения τ получаем $\tau'\big|_I = \upsilon_{|I|}$.

Прежде чем доказывать оставшиеся свойства, заметим, что если γ — индексация множества I и $n-1 \in I$, то отображение γ', где $\gamma'(i) = \gamma(i)$ при $i \in I$ и $\gamma'(n) = \gamma(n-1)$, является индексацией множества координат $I \cup \{n\}$ отношения τ.

Пусть γ_1, γ_2 — индексации множества I, а γ_1', γ_2' указанные в предыдущем абзаце индексации множества I'. Если γ_1, γ_2 различного ранга, то и γ_1', γ_2' имеют различный ранг. Отсюда $\tau\big|_{I'}$ тривиально, а потому и $\tau'\big|_I$ тривиально. Условие SN3 выполнено. Пусть теперь γ_1, γ_2 и $i \in I$ удовлетворяют посылке условия SN4. Для γ_1', γ_2' выполнены те же условия, а значит, $\tau\big|_{I'} = \tau\big|_{I'\setminus\{i\}} \times \tau\big|_{\{i\}}$. Если $n \notin I'$, то в силу SN1 имеем $\tau'\big|_I = \tau\big|_{I'}$. Иначе, если $i \neq n-1$, то $\tau'\big|_I = \nabla_{n-1,n}\tau\big|_{I'} = \nabla_{n-1,n}(\tau\big|_{I'\setminus\{i\}} \times \tau\big|_{\{i\}}) = \nabla_{n-1,n}(\tau\big|_{I'\setminus\{i\}}) \times \tau\big|_{\{i\}} = \tau'\big|_{I\setminus\{i\}} \times \tau'\big|_{\{i\}}$. Пусть, наконец, $i = n-1$. Тогда $n-1$ и n удовлетворяют посылке SN4 для индексаций γ_1', γ_2'. Отсюда $\tau\big|_{I'} = \tau\big|_{I'\setminus\{n-1,\,n\}} \times \tau\big|_{\{n-1\}} \times \tau\big|_{\{n\}}$. Таким образом, $\tau'\big|_I = \tau'\big|_{I\setminus\{n-1\}} \times \tau'\big|_{\{n-1\}}$.

Проверим SN5. Если $n-1, n \notin M_\tau(I)$, то SN5 следует из соответствующего свойства τ. Предположим, $n-1 \in M_\tau(I)$, γ — индексация I отношения τ'. Тогда отображение γ является также индексацией множества координат I отношения τ. Пусть γ' — продолжение γ на $M_\tau(I)$ согласно свойству SN5. Доопределим γ' на множество $M_\tau(I) \cup \{n\}$ как указано выше, получим индексацию γ''. Далее, вновь по SN5 отношения τ, существует продолжение γ''' отображения γ'' на $M_\tau(M_\tau(I) \cup \{n\}) = M_\tau(I \cup \{n\})$. Пусть $\mathbf{a} \in \tau$ таков, что $\mathbf{a}\big|_I$ — выделяющий (связывающий, титульный) кортеж и $a_{n-1} = a_n$. Такой кортеж найдется, так как $\mathbf{a}\big|_I \in \tau'\big|_I$ по определению индексации. Тогда согласно SN5 кортеж $\mathbf{a}\big|_{M_\tau(I\cup\{n\})} \in \tau\big|_{M_\tau(I\cup\{n\})}$ — выделяющий (связывающий, титульный) с тем же номером для γ'''. Так как $a_{n-1} = a_n$, имеем $\mathbf{a}\big|_{\underline{n-1}} \in \tau'$, т.е. ограничение γ''' на $M_{\tau'}(I)$ является индексацией.

Пусть, наконец, γ — индексация множества I, γ' — соответствующая ей индексация I'. Достаточно рассматривать случай, когда I замкнуто и $n-1 \in I$. Если $n-1, n$ содержатся в одном классе эквивалентности $\xi(\tau, I)$, то $a_{n-1} = a_n$ всякий раз, когда $\mathbf{a}\big|_{I'} \in E_k^{|I'|}$. Отсюда $\mathrm{K}(\tau'\big|_I) = \mathrm{K}(\nabla_{n-1,n}\tau\big|_{I'}) = \mathrm{K}(\tau\big|_{I'})$. Если же $n-1$ содержится в

s-том классе эквивалентности $\xi(\tau, I')$, а n — в t-том, то для каждого $\mathbf{a} \in \tau\big|_{I'} \cap E_k^{|I'|}$ такого, что $a_{n-1} = a_n$, справедливо равенство $a_i = a_j$, где i, j содержатся в объединении s-го и t-го классов $\xi(\tau, I)$. Каждый класс $\xi(\tau', I)$ есть объединение классов эквивалентности $\xi(\tau, I')$ (с точностью до наличия n). Далее, нетрудно видеть, что кортеж $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, для которого $\mathbf{a}\big|_I \in E_k^{|I|}$, $a_i = a_j$ всякий раз, когда $(i, j) \in \xi(\tau', I)$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n-1}) \in \tau$ содержится в τ'. Отсюда $\mathrm{K}(\tau', I)$ получено из $\nabla_{s,t}\mathrm{K}(\tau, I')$ отождествлениями тех координат i, j, для которых $\mathbf{b} \in \nabla_{s,t}\mathrm{K}(\tau, I')$ влечет $b_i = b_j$. Таким образом, $\mathrm{K}(\tau', I) \in C$, если $\mathrm{K}(\tau, I') \in C$.

Лемма 6 доказана. □

Следствие 5 *SN является клоном отношений.*

Искомое вложение ψ определим следующим образом. Пусть $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ последовательность клонов отношений из R_k Последовательности $\mathbf{C}$ поставим в соответствие клон отношений $\psi(\mathbf{C}) = \langle SN \cup \{\kappa_\varrho^r \mid \varrho \in C_r, r \in \mathbb{N}\}\rangle$.

Лемма 3 непосредственно влечет, что $\psi(\mathbf{C}^1 \vee \mathbf{C}^2) \subseteq \psi(\mathbf{C}^1) \vee \psi(\mathbf{C}^2)$ для любых последовательностей клонов $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}^2$, а значит, отображение ψ сохраняет решеточные объединения. Далее, поскольку $SN \cup \{\kappa_\varrho^r \mid \varrho \in C_r, r \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет всем условиям $\mathrm{SN}(r, C_r)$, то по лемме 6 $\psi(\mathbf{C})$ также им удовлетворяет. Поэтому ψ взаимнооднозначно.

Таким образом, нам необходимо проверить, что ψ сохраняет пересечения и отображает $\mathcal{L}_k^\partial \times \ldots \mathcal{L}_k^\partial \times \ldots$ на интервал решетки $\mathcal{L}_{k+3}^\partial$.

§5. Строение суперпозиций отношений из $\psi(\mathbf{C})$

Пусть отношение τ определено формулой

$$P_\tau(x_1, \ldots, x_n) = \exists(x_i)_{i \in \{n+1, \ldots, m\}} \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} P_{\tau_\alpha}(x_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}}, \tag{2}$$

где $\tau_\alpha \in SN \cup \{\kappa_\varrho^r \mid \varrho \in R_k, r \in \mathbb{N}\}$, $n_\alpha = \operatorname{ar} \tau_\alpha$ и $\pi_\alpha \colon \underline{n_\alpha} \to \underline{m}$ $(\alpha \in \Lambda)$. Пусть

$$P_{\overline{\tau}}(x_1, \ldots, x_m) = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} P_{\tau_\alpha'}(x_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}},$$

где $\tau'_\alpha = \tau_\alpha$, если $\tau_\alpha \in SN$, и $\tau'_\alpha = \kappa^r_\upsilon$, если $\tau_\alpha = \kappa^r_\varrho$, причем $\operatorname{ar}\upsilon = \operatorname{ar}\varrho$ и υ есть универсальное отношение. Рассмотрим отношение τ', задаваемое формулой

$$P_{\tau'}(x_1, \ldots, x_n) = \exists(x_i)_{i \in \{n+1,\ldots,m\}} P_{\overline{\tau}}. \qquad (3)$$

По следствиям 4, 5 имеем $\tau' \in SN$.

Лемма 7 *Для любого $I \subseteq \underline{n}$ справедливо равенство $M_\tau(I) = M_{\tau'}(I)$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что τ и τ' имеют одни и те же замкнутые множества. Поскольку $\tau_\alpha \subseteq \tau'_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$, то $\tau \subseteq \tau'$. Поэтому каждое множество, замкнутое для τ, замкнуто для τ'.

Пусть теперь $I = M_{\tau'}(I)$. Проверим, что для всякого $\mathbf{a} \in \tau$ кортеж $2_I(\mathbf{a})$ содержится в τ. Пусть $\mathbf{b}$ допустим для (2) и $\mathbf{b}\big|_{\underline{n}} = \mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{b} \in \overline{\tau}$ и $\mathbf{c} = 2_{M_{\overline{\tau}}(I)}(\mathbf{b}) \in \overline{\tau}$, поскольку $\overline{\tau} \in SN$ по Следствию 5. Кортеж $\mathbf{c}$ допустим для (2). Действительно, если τ_α не является кодирующим, то $\tau'_\alpha = \tau_\alpha$ и $(c_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}} \in \tau_\alpha$. Далее, если τ_α кодирующее и среди $c_{\pi_\alpha(1)}, \ldots, c_{\pi_\alpha(n_\alpha)}$ есть $k+2$, то $(c_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}}$ содержится в τ_α тогда и только тогда, когда он содержится в τ'_α. Если же $(c_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}} \in E^{n_\alpha}_{k+2}$, то $(c_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}} = (b_{\pi_\alpha(i)})_{i \in \underline{n_\alpha}}$. Таким образом, $\mathbf{c}$ допустим для (2). Поскольку $M_{\overline{\tau}}(I) \cap \underline{n} = M_{\tau'}(I) = I$ имеем $2_I(\mathbf{a}) = \mathbf{c}\big|_{\underline{n}} \in \tau$. □

Отношение τ на E_{k+3} назовем $k+2$-центральным, если τ содержит всякий кортеж, среди компонент которого встречается $k+2$. Отношение ϱ назовем прямо неразложимым, если его нельзя представить в виде $\varrho = \varrho_1 \times \varrho_2$.

Для каждого $I \subseteq \underline{n}$ такого, что $M_\tau(I) = I$ определим $k+2$-центральное отношение $\tau(I)$ равенством

$$\tau(I) \cap E^{|I|}_{k+2} = \tau\big|_I \cap E^{|I|}_{k+2}.$$

Пусть также отношение τ'' определено формулой

$$P_{\tau''}(x_1, \ldots, x_n) = P_{\tau'}(x_1, \ldots, x_n) \wedge \bigwedge_{\substack{I \subseteq \underline{n},\ M_\tau(I) = I \\ \tau\big|_I \text{ прямо неразложимо}}} P_{\tau(I)}(x_i)_{i \in I}.$$

Лемма 8 *Справедливо равенство $\tau'' = \tau$.*

Доказательство.

"$\supseteq$" Возьмем $\mathbf{a} \in \tau$. Тогда $\mathbf{a} \in \tau'$ поскольку $\tau_\alpha \subseteq \tau'_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$. Рассмотрим $I \subseteq \underline{n}$ такое, что $M_\tau(I) = I$. Если $k+2 \in \{a_i \mid i \in I\}$, то $\mathbf{a}\big|_I \in \tau(I)$ в силу $k+2$-центральности. Иначе, $\mathbf{a}\big|_I \in \tau\big|_I \cap E^{|I|}_{k+2} \subseteq \tau(I)$.

"$\subseteq$" Возьмем $\mathbf{a} \in \tau''$ и пусть $I = \{i \mid a_i \neq k+2\}$. По лемме 7 множество I замкнуто, так как $\mathbf{a} \in \tau'$. Предположим

$$\tau\big|_I = \tau\big|_{I_1} \times \ldots \times \tau\big|_{I_t},$$

где все сомножители прямо неразложимы. Поскольку $\mathbf{a}\big|_{I_j} \in \tau(I_j)$ для всех $j \in \underline{t}$ получаем

$$\mathbf{a}\big|_I \in \tau\big|_{I_1} \times \ldots \times \tau\big|_{I_t} = \tau\big|_I,$$

а в силу SN1 имеем $\mathbf{a} \in \tau$. □

Проверим теперь, что для любого I отношение $\tau(I)$ содержится в клоне отношений $\langle SN \cup \{\kappa^r_{K(\tau,I)}\}\rangle$ для любого натурального r. Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Пусть χ — $k+2$-центральное отношение, не содержащее единичного кортежа, причем множество всех его координат имеет единственную индексацию γ ранга r. Обозначим $n = \operatorname{ar}\chi$, $\varrho = \mathrm{K}(\chi, \underline{n})$, $s = \operatorname{ar}\varrho$, $T = \underline{n + sp^r} \backslash \underline{n}$. Через $\chi^\downarrow$ обозначим $(n+sp^r)$-местное отношение, определенное условиями:

(1) для всякого $\mathbf{a} \in \chi^\downarrow$ такого, что $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}} \in E^n_k$, условие $(i,j) \in \xi(\chi, \underline{n})$ влечет $a_i = a_j$. Другими словами, $\xi(\chi^\downarrow, \underline{n}) = \xi(\chi, \underline{n})$;

(2) $\mathbf{a} \in \chi^\downarrow$ тогда и только тогда, когда либо

(а) $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}} \notin E^n_{k+2}$ и $\mathbf{a}\big|_T \in \kappa^r_\upsilon$, где υ — s-местное универсальное отношение, либо

(б) $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}}$ — γ-выделяющий (γ-связывающий, γ-титульный) с номером j и для всех $i \in \underline{n}$ кортеж $\mathbf{a}\big|_{\{n+(i-1)p^r+1,\ldots,n+ip^r\}}$ выделяющий (связывающий, титульный) с тем же номером, либо

(в) $\mathbf{a}\big|_T = \mathbf{w}^r_{\mathbf{b}}$, $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}} \in E^n_k$, причем $\mathrm{K}(\mathbf{a}\big|_{\underline{n}}) = \mathbf{b}$, либо

(г) $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}} \in E^n_{k+2} \cap \chi$, $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}} \notin E^n_k$, $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}}$ не выделяющий, не связывающий и не титульный, а $\mathbf{a}\big|_T$ содержится в $\kappa^r_v \cap E^{|T|}_{k+2}$.

Лемма 9 $\chi^{\downarrow} \in SN$.

Доказательство. Обозначим через γ_0 единственную, в силу предложения 2, индексацию множества T. Нетрудно проверить, что оператор $M = M_{\chi^{\downarrow}}$ действует следующим образом: $M(I) = I$, если $\underline{n} \not\subseteq I$ и $\gamma_0(T \cap I) \neq \underline{p^r}$; $M(I) = I \cup T$, если $\underline{n} \not\subseteq I$ и $\gamma_0(T \cap I) = \underline{p^r}$, и, наконец, $M(I) = \underline{n} \cup T$ в остальных случаях.

SN1. Достаточно рассмотреть случай $\underline{n} \not\subseteq I$. Возьмем $\mathbf{a} \in \chi^{\downarrow}$. Пусть сначала $\gamma_0(T \cap I) \neq \underline{p^r}$. Кортеж $2_{M(I)}(\mathbf{a})\big|_T = 2_I(\mathbf{a})\big|_T$ содержится в κ^{ϱ}_v. Поскольку $2_{M(I)}(\mathbf{a})\big|_{\underline{n}} \notin E^n_{k+2}$, по пункту 2(а) имеем $2_{M(I)}(\mathbf{a}) \in \chi^{\downarrow}$. Если же $\gamma_0(T \cap I) = \underline{p^r}$, то $2_{M(I)}(\mathbf{a})\big|_T = \mathbf{a}\big|_T$ и в силу пункта 2(а) и $k+2$-центральности χ получаем требуемое.

SN2. Допустим, что $(k+1, \ldots, k+1) \in \chi^{\downarrow}\big|_I$. Поскольку $\chi^{\downarrow}\big|_{\underline{n}}$, $\chi^{\downarrow}\big|_{T'}$, где $T' \subseteq T$ таково, что $\gamma_0(T') = \underline{p^r}$, не содержат единичного кортежа, множество I не содержит ни $\underline{n}$, ни T. Но тогда $\chi^{\downarrow}\big|_I$ универсально в силу свойства SN1 отношения $\chi^{\downarrow}$, $k+2$-центральности χ и свойства SN2 отношения κ^r_v.

SN3. Предположим, γ_1, γ_2 — индексации I разных рангов. Тогда, поскольку $\underline{n}$ имеет единственную индексацию и по предложению 2 имеем $\underline{n} \not\subseteq I$ и $\gamma_0(I \cap T) \neq \underline{p^r}$. Отсюда $\chi^{\downarrow}\big|_{I \cap \underline{n}}$ и $\chi^{\downarrow}\big|_{I \cap T}$ универсальны согласно п.2(а) и свойству SN1 отношения κ^r_v. Кроме того, $\chi^{\downarrow}\big|_I = \chi^{\downarrow}\big|_{I \cap \underline{n}} \times \chi^{\downarrow}\big|_{I \cap T}$. Таким образом, $\chi^{\downarrow}\big|_I$ — универсальное отношение.

SN4. Пусть γ_1, γ_2 — индексации множества I и $\gamma_1(i) \neq \gamma_2(i)$ для некоторого $i \in I$. Тогда $\underline{n} \not\subseteq I$, так как в противном случае I однозначно индексируемо. Если к тому же $\gamma_0(T \cap I) \neq \underline{p^r}$, то $\chi^{\downarrow}\big|_I$ универсально. В оставшемся случае имеем

$$\chi^{\downarrow}\big|_I = \chi^{\downarrow}\big|_{T \cap I} \times \chi^{\downarrow}\big|_{\underline{n} \cap I} = \chi^{\downarrow}\big|_{T \cap I} \times \upsilon_{|\underline{n} \cap I|}.$$

В силу свойств SN3, SN4 отношения κ^r_v множество T имеет единственную индексацию. Поэтому $i \in \underline{n} \cap I$ и требуемое вытекает из указанного равенства.

SN5. Если $\underline{n} \not\subseteq I$, $\gamma_0(T \cap I) \neq \underline{p^r}$, свойство SN5 тривиально. В случае $\underline{n} \not\subseteq I$, $\gamma_0(T \cap I) = \underline{p^r}$ свойство SN5 следует из SN5 отношения κ^r_υ. Пусть $\underline{n} \subseteq I$ и γ — индексация множества I. Положим $\gamma'\colon \underline{n} \cup T \to \underline{p^r}$, где $\gamma'(i) = \gamma(i)$, если $i \in I$, и $\gamma'(i) = \gamma_0(i)$ в противном случае. Согласно п.2(б) ограничение γ' на T есть индексация γ_0 отношения $\chi^\downarrow\big|_T$. Поскольку χ также однозначно индексируемо, то по пунктам 2(б),(в) получаем требуемое.

SN6. Если $\underline{n} \not\subseteq I$, то $\mathrm{K}(\chi^\downarrow, I)$ либо универсально (при $\gamma_0(I \cap T) \neq \underline{p^r}$), либо равно $\upsilon_{|\underline{n} \cap I|} \times \varrho\big|_J$, где $J = \{j \mid$ найдется $i \in \underline{p^r}$ такой, что $n + (j-1)p^r + i \in I\}$ (при $\gamma_0(I \cap T) = \underline{p^r}$). Будем полагать, поэтому $\underline{n} \subseteq I$. Пусть $S_1, \ldots, S_q$ — классы эквивалентности $\xi(\chi, \underline{n})$ и $T_1, \ldots, T_q$ — классы эквивалентности $\xi(\chi^\downarrow, T)$. Тогда в силу пункта 2(в) классы эквивалентности $\xi(\chi^\downarrow, I)$ суть $S_1 \cup (T_1 \cap I), \ldots, S_q \cup (T_q \cap I)$. Наконец, поскольку $\chi^\downarrow\big|_{\underline{n}}$ и $\chi^\downarrow\big|_T$ содержат все кодирующие кортежи, получаем, что $\mathrm{K}(\chi^\downarrow, I)$ — универсальное отношение. □

Лемма 10 $P_\chi = \exists (x_i)_{i \in T} P_{\chi^\downarrow}(x_i)_{i \in \underline{n} \cup T} \wedge P_{\kappa^r_\varrho}(x_i)_{i \in T}$.

Для доказательства необходимо лишь заметить, что для любого допустимого кортежа $\mathbf{a}$ имеем $\mathbf{a}\big|_{\underline{n}} \in \chi \cap E^n_k$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}\big|_T \in \kappa^r_\varrho \cap E^{|T|}_k$.

Лемма 11 $\tau(I) \in \langle SN \cup \{\kappa^r_{\mathrm{K}(\tau, I)}\}\rangle$.

Из лемм 8,11 очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Предложение 3

$$\tau \in \langle SN \cup \{\kappa^r_{\mathrm{K}(\tau,I)} \mid I \subseteq \underline{ar\,\tau},\ M_\tau(I) = I,\ \tau\big|_I \textit{ прямо неразложимо и индексируемо ранга } r\}\rangle.$$

Далее мы покажем, что если $\tau\big|_I$ индексируемо ранга r, то $\kappa^r_{\mathrm{K}(\tau,I)} \in \in \langle SN \cup \{\tau\big|_I\}\rangle$.

Пусть γ — индексация (единственная) отношения $\tau\big|_I$ и пусть $T_1, \ldots, T_q$ — классы эквивалентности $\xi(\tau\big|_I)$. Пусть также $s = \mathrm{ar}\,\mathrm{K}(\tau, I)$. Положим $\pi\colon I \to \underline{s \cdot p^r}$, причем $\pi(i) = (u-1)p^r + \gamma(i)$, если $i \in T_u$.

Лемма 12 *Пусть* $\tau_1 = \kappa^r_\upsilon$, *где* υ — *универсальное* s-*местное отношение,* $\tau_2 = \kappa^r_{\mathrm{K}(\tau,I)}$. *Тогда* $P_{\tau_2}(x_1,\ldots,x_{sp^r}) = P_{\tau_1}(x_1,\ldots,x_{sp^r}) \wedge P_{\tau\restriction_I}(x_{\pi(i)})_{i\in I}$.

Доказательство. Обозначим через Q образ отображения π, пусть также $\gamma'\colon Q \to \underline{p^r}$ такое, что $\gamma'(j) = \gamma(i)$, если $\pi(i) = j$. По построению π отображение γ' определено корректно и, более того, $\gamma'(j) \equiv j \pmod{p^r}$. По предположению $(k+1,\ldots,k+1) \notin \tau\restriction_I$ и $\tau\restriction_I$ индексируемо, поэтому $\gamma'(Q) = \underline{p^r}$. Пусть еще отображение $\gamma_0\colon \underline{sp^r} \to \underline{p^r}$ таково, что $\gamma_0(i) \equiv i \pmod{p^r}$. Очевидно, $\gamma' = \gamma_0\restriction_Q$.

Пусть сначала $\mathbf{a} \in \tau_2 = \kappa^r_{\mathrm{K}(\tau,I)}$. Тогда, очевидно, $\mathbf{a} \in \kappa^r_\upsilon$. Положим $J = \{i \mid a_i \neq k+2\}$. Если $\gamma_0(J) \neq \underline{p^r}$, то $Q \not\subseteq J$ и $(a_{\pi(i)})_{i\in I} \in \tau\restriction_I$ в силу свойства SN1 отношения $\tau\restriction_I$. Если $\mathbf{a}$ выделяющий, связывающий или титульный, то таков и кортеж $\mathbf{a}\restriction_Q$ относительно индексации γ'. Отсюда $(a_{\pi(i)})_{i\in I} \in \tau\restriction_I$. Наконец, если $\mathbf{a}$ кодирующий, то $\mathrm{K}(\mathbf{a}) \in \mathrm{K}(\tau,I) = \mathrm{K}(\tau\restriction_I, I)$, поэтому кортеж $(a_{\pi(i)})_{i\in I}$ содержится в $\tau\restriction_I$.

Обратно, предположим $\mathbf{a} \in \kappa^r_\upsilon$ и $(a_{\pi(i)})_{i\in I} \in \tau\restriction_I$. Поскольку $\mathbf{a} \in \kappa^r_\upsilon$, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathbf{a}$ кодирующий. Как и выше, из того, что $(a_{\pi(i)})_{i\in I} \in \tau\restriction_I$ следует включение $\mathrm{K}(\mathbf{a}) \in \mathrm{K}(\tau\restriction_I, I) = \mathrm{K}(\tau, I)$. Отсюда немедленно получаем $\mathbf{a} \in \tau_2$. □

Таким образом, если I замкнуто, прямо неразложимо и индексируемо ранга r, то $\kappa^r_{\mathrm{K}(\tau,I)} \in \langle SN \cup \{\tau\restriction_I\}\rangle$.

Следующее предложение непосредственно вытекает из взаимной однозначности ψ, предложения 3 и только что доказанного.

Предложение 4 $\psi(\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2) = \psi(\mathbf{C}_1) \wedge \psi(\mathbf{C}_2)$ *для любых последовательностей* $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$.

Доказательство. Включение $\psi(\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2) \subseteq \psi(\mathbf{C}_1) \wedge \psi(\mathbf{C}_2)$ очевидно. Если $\tau \in \psi(\mathbf{C}_1) \wedge \psi(\mathbf{C}_2)$, то для всякого индексируемого множества $I \subseteq \underline{\mathrm{ar}\,\tau}$ имеем $\mathrm{K}(\tau, I) \in \mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2$. Отсюда по предложению 3 и лемме 12 $\tau \in \psi(\mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2)$. □

Проверим наконец, что образом отображения ψ является интервал в решетке $\mathcal{L}^\partial_{k+2}$.

Предложение 5 *Если* $\mathbf{C}^1 \leq \mathbf{C}^2$ *и* $\psi(\mathbf{C}^1) \leq C \leq \psi(\mathbf{C}^2)$, *то* $C = \psi(\mathbf{C}')$ *для некоторой последовательности* $\mathbf{C}'$.

Доказательство. Пусть T_r — множество всех таких ϱ, что $\varrho = \mathrm{K}(\tau, I)$, $\tau \in C \backslash \psi(\mathbf{C}^1)$, где множество I индексируемо ранга r и $T = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} T_r$. Для любого $\varrho \in T_r$ имеем $\kappa^r_\varrho \in C$, по лемме 12. Положим $\mathbf{C}' = (C'_1, C'_2, \ldots)$, где C'_r порожден множеством $C^1_r \cup T_r$. Тогда $\psi(\mathbf{C}') \subseteq \langle \psi(\mathbf{C}^1) \cup \{\kappa^r_\varrho \mid r \in \mathbb{N}, \varrho \in T_r\}\rangle$. С другой стороны, каждое $\tau \in C$ представимо формулой, в которой участвуют лишь отношения $\tau_\alpha \in SN \cup \{\kappa^r_\varrho \mid \varrho \in C^2_r, r \in \mathbb{N}\}$, $\alpha \in \Lambda$. По предложению 3 можно считать, что все кодирующие отношения ϱ_α содержатся в $\{\kappa^r_\varrho \mid \varrho \in C'_r, r \in \mathbb{N}\}$. Итак, $\varrho \in \psi(\mathbf{C}')$. □

Это завершает доказательство теоремы 1.

Литература

[1] Post E. *Two-valued iterative systems of mathematical logic.* Ann. Math. Studies 5, Princeton Univ. Press.,1941.

[2] Булатов А.А. Конечные подрешетки в решетке клонов. *Алгебра и логика* (1994) **33**, N5, 514-549.

[3] Булатов А.А. Тождества в решетках замкнутых классов. *Дискр. Математика* (1992) **4**, N4, 140–148.

[4] Булатов А.А. Подрешетки решетки клонов функций на трехэлементном множестве. I. *Алгебра и логика* (1999) **38**, N1, 3–23.

[5] Гретцер Г. *Общая теория решеток.* М.: Мир, 1982.

[6] Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике. *Труды Матем. ин-та АН СССР* (1958) **51**, 5–142.

[7] Pöschel R., Kalužnin L.A. *Funktionen- und Relationenalgebren.* Ein Kapitel der diskreten Mathematik VEB DVW, Berlin, 1979.

[8] Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *ДАН СССР* (1959) **127**, N1, 44–46.

[9] Haddad L., Rosenberg I.G. Un intervalle Booléen de clones sur un univers fini. *Ann. Sci. Math., Québec* (1988) **12**, N.2, 211–231.

[10] Крохин А.А. Моноидальные интервалы в решетках клонов. *Алгебра и логика* (1995) **34**, N3, 288-310.

[11] Боднарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А. Теория Галуа для алгебр Поста. I,II *Кибернетика,* вып.3 (1969), 1–10, вып.5 (1969), 1–9.

Булатов Андрей Арнольдович
каф. алгебры и дискретной математики
Уральский госуниверситет
пр. Ленина 51
620083 г. Екатеринбург

тел.: (3432) 557-579
факс.: (3432) 555-964
e-mail: Andrei.Bulatov@usu.ru