ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 397, № 5, с. 1–3

МАТЕМАТИКА

УДК 512.579

СЛОЖНОСТЬ КОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧИ "ОБОБЩЕННАЯ ВЫПОЛНИМОСТЬ"

© 2004 г. А. А. Булатов

Представлено академиком Ю.Л. Ершовым 17.11.2003 г.

Поступило 06.01.2004 г.

Задача "Обобщенная выполнимость" (называемая иногда задачей удовлетворения ограничений) – это комбинаторная задача, в которой дана формула первого порядка $\Phi = \exists \mathbf{x}(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n)$, где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ – атомарные формулы, зависящие от переменных из кортежа $\mathbf{x}$, и ее модель на некотором множестве; требуется определить, истинная ли Φ в данной модели. Мы будем использовать для этой задачи общепринятую англоязычную аббревиатуру CSP (от Constraint satisfaction problem). Важным частным случаем данной задачи является задача "выполнимость", в которой в качестве Φ фигурирует формула исчисления высказываний в конъюнктивной нормальной форме.

Язык, обеспечиваемый задачей CSP, оказался весьма гибким и мощным, что позволяет представлять широкий спектр разнообразных комбинаторных задач в виде частных случаев этой задачи. Количество работ, развивающих приложения такого рода, исчисляется к настоящему времени сотнями. В последние годы появляются универсальные решатели комбинаторных задач, входом для которых служит описание комбинаторной задачи в терминах CSP. Задача CSP играет большую роль также в теории сложности алгоритмов. Отметим в этой связи, что задача "выполнимость" является первой известной *NP*-полной задачей. Достаточно детально с задачей CSP можно ознакомиться по монографиям [4, 5]. Основной источник по теории сложности на русском языке – книга [8].

Как и задача "выполнимость", более общая задача CSP является *NP*-полной. Однако некоторые подзадачи этих задач могут быть решены за полиномиальное время. Например, если в задаче "выполнимость" мы ограничимся конъюнктивными нормальными формами, элементарные дизъюнкции которых содержат не более двух литералов, мы получим задачу "2-выполнимость", которая может быть решена с помощью метода резолюций за полиномиальное время. Аналогичным образом могут быть введены ограничения и в задаче CSP.

Для данного множества A множества конечноместных отношений Γ на A через CSP(Γ) обозначается класс задач CSP, в которых предикатные символы интерпретируются отношениями из Γ. Многие известные комбинаторные задачи могут быть представлены в таком виде. Например, задача "k-раскраска графа" эквивалентна задаче CSP($\{\neq_A\}$), где $\neq_A$ обозначает отношение антиравенства на k-элементном множестве A. Во многих случаях ограниченная задача CSP такого вида может быть решена за полиномиальное время (например, "2-раскраска графа"); в других случаях она остается *NP*-полной.

Таким образом, возникает проблема: охарактеризовать множества отношений Γ, для которых задача CSP(Γ) полиномиальная [*NP*-полна]. Мы будем называть эту проблему проблемой классификации. Проблема классификации в случае, когда множество отношений определено на конечном множестве, интенсивно исследовалась в последние десятилетия. Подходы, использованные для ее изучения, включают методы из математической логики (см. [6]), теории игр (см. [12, 13]), баз данных (см. [6, 13]).

Примечательно, что все исследованные задачи вида CSP(Γ), включая "выполнимость", либо *NP*-полны, либо могут быть решены за полиномиальное время. В то же время, как хорошо известно, если выполняется гипотетическое неравенство $P \neq NP$ (напомним, что P и NP обозначают классы задач, решаемых за полиномиальное время детерминированной и недетерминированной машинами Тьюринга соответственно), то существует бесконечно много промежуточных классов сложности. В [6] была выдвинута гипотеза, что указанная дихотомия имеет место для всех задач вида CSP(Γ). Эта гипотеза получила название гипотезы о дихотомии. В [1] гипотеза о дихотомии была уточнена – был предложен критерий, различающий полиномиальные и *NP*-полные задачи.

Проблема классификации полностью решена в случае задачи "Булева выполнимость" [14], в

Уральский государственный университет им. А.М. Горького, Екатеринбург

которой модель двухэлементна. Отметим, что “Булева выполнимость” несколько шире, чем “выполнимость”: в ней допускаются произвольные предикаты над двухэлементным множеством, а не только предикаты, выразимые элементарными дизъюнкциями.

В данном сообщении мы обобщаем результат из [14] для множеств Γ, содержащих все унарные отношения. Такие множества отношений и соответствующие им задачи называются консервативными. Консервативность означает по существу, что возможные значения переменных в формуле могут быть ограничены произвольным образом для каждой переменной по отдельности. Отметим, что во многих статьях и монографиях, посвященных задаче CSP, именно этот тип задачи считается стандартным (см., например, [5]). Мы полностью решаем проблему классификации в указанном случае; при этом подтверждается гипотеза о диохотомии и критерий; предложенный в [1].

Говорят, что операция $f(x_1, x_2, .., x_n)$ является полиморфизмом отношения R на данном множестве (в других терминах, R инвариантно относительно f), если для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, кортеж $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где f действует покомпонентно, также содержится в R. Как нетрудно проверить, если операция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве A является полиморфизмом консервативного множества, то $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для произвольных $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Операции, обладающие этим свойством, называют консервативными (отсюда и происходит название изучаемого типа задач). Для множества отношений Γ множество всех операций, сохраняющих все отношения из Γ, обозначается через Pol(Γ). В [11] показано, что если множества отношений Γ_1, Γ_2 на некотором конечном множестве таковы, что $\mathrm{Pol}(\Gamma_1) \subseteq \mathrm{Pol}(\Gamma_2)$ и Γ_2 конечно, то задача CSP(Γ_2) сводится за полиномиальное время к CSP(Γ_1).

Таким образом, сложность задач вида CSP(Γ) зависит только от полиморфизмов множества Γ. Некоторые типы операций гарантируют полиномиальность задачи CSP, соответствующей множеству инвариантных отношений. Среди них константные операции, полурешеточные операции, мальцевские операции (т.е. тернарные операции f, удовлетворяющие тождествам $f(x, y, y) = f(y, y, x) = x$), функции большинства (так называются тернарные операции f, удовлетворяющие тождествам $f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x$).

Основным результатом данной работы является следующая

Т е о р е м а. *Пусть* Γ – *консервативное множество отношений на конечном множестве A. Задача* CSP(Γ) *полиномиальна тогда и только тогда, когда для каждого двухэлементного подмножества* $B \subseteq A$ (*будем считать, что* $B = \{0, 1\}$) *существует полиморфизм f множества* Γ *такой, что* $f|_B$ *есть одна из следующих операций*: *конъюнкция* $x \vee y$, *дизъюнкция* $x \wedge y$, *медиана* $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge zx)$, *операция* $x + y + z$, *где* + *обозначает сложение по модулю* 2; *в противном случае* CSP(Γ) *NP-полна*.

Сформулированную теорему можно эффективно использовать для изучения многих частных комбинаторных задач. В качестве примера рассмотрим задачу “H-раскраска графа”. Мы рассматриваем как ориентированные, так и неориентированные графы. Пусть $H = (V, E)$ – граф с множеством вершин V и множеством ребер E. В задаче “H-раскраска графа” требуется определить, существует ли гомоморфизм данного графа G в H. Нетрудно понять, что “k-раскраска графа” – это частный случай “H-раскраска графа”, в котором H есть полный граф с k вершинами. Заметим также, что “H-раскраска графа” эквивалентна задаче CSP($\{E\}$), где E рассматривается как бинарное отношение. Для этой задачи существует соответствующая консервативная задача CSP($2^V \cup \{E\}$); здесь 2^V обозначает множество всех подмножеств из V (или, что то же самое, множество всех унарных отношений на V). На языке теории графов указанная задача “Консервативная H-раскраска графа” – формулируется следующим образом: дан граф $G = (V', E')$ и для каждой вершины $v \in V'$ задано множество вершин $L(v) \subseteq V$; требуется определить, существует ли гомоморфизм φ из G в H такой, что $\varphi(v) \in L(v)$ для любой вершины $v \in V'$.

В зависимости от графа H задачи “H-раскраска графа” и “Консервативная H-раскраска графа” могут быть полиномиальными или NP-полными. В случае неориентированных графов сложность этих задач известна (см. [9] и [7] соответственно). В [6] показано, что классификация задач “H-раскраска графа” в соответствии с их сложностью эквивалентна решению проблемы классификации для общей задачи CSP. Однако, поскольку “Консервативная H-раскраска графа” соответствует консервативной задаче CSP, наша теорема позволяет определить сложность этой задачи. А именно, справедливо

С л е д с т в и е. *Пусть* $H = (V, E)$ – *граф, ориентированный или неориентированный. Задача* “*Консервативная H-раскраска графа*” *полиномиальна тогда и только тогда, когда для каждого двухэлементного множества* $W \subseteq V$ (*считаем, что* $W = \{0, 1\}$) *существует консервативный полиморфизм отношения E такой, что* $f|_B$ – *одна из следующих операций*: $x \wedge y$, $x \vee y$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$, $x + y + z$; *в противном случае эта задача NP-полна*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bulatov A.A., Krokhin A.A., Jeavons P.G.* // Lect. Notes Comput. Sci. 2000. 1853. P. 272–282.
2. *Bulatov A.A.* // Proc. FOCS'02. IEEE Press. 2002. P. 649–658.
3. *Bulatov A.A.* Techn. Rept PRF-RR-02-05. Comput. Lab. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
4. *Creignou N., Khanna S.* Sudan Complexity Classifications of Boolean Constraint Satisfaction Problems. Philadelphia: SIAM Publ., 2001.
5. *Dechter R.* Constraint processing. San Francisco: Morgan Kaufmann Publ., 2003.
6. *Feder T., Vardi M.Y.* // SIAM J. Comput. 1998. V. 28. P. 57–104.
7. *Feder T., Hell P., Huang J.* // J. Graph Theory. 2003. V. 42. № 1. P. 61–80.
8. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, М.: Мир, 1982. 416 с.
9. *Hell P., Nešetřil J.* // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. V. 48. P. 92–110.
10. *Jeavons P.G., Cohen D.A., Gyssens M.* // JACM. 1997. V. 44. P. 527–548.
11. *Jeavons P.G.* // Theor. Comput. Sci. 1998. V. 200. P. 185–204.
12. *Kolaitis Ph.G., Vardi M.Y.* // Proc. AAAI'00. 2000. P. 175–181.
13. *Kolaitis Ph.G.* Constraint Satisfaction, Databases and logic // Proc. IJCAI'03. 2003. P. 648–651.
14. *Schaefer T.J.* // Proc. STOC'78. ACM Press. 1978. P. 216–226.